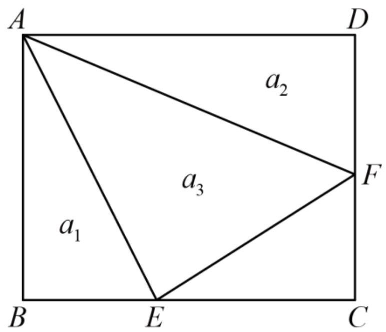
# 11 高斯五邊形定理…稀少，但成熟

“稀少，但成熟”是數學王子高斯的座右銘，高斯不僅是許多重要數學理論的原創者，在數論，算術與代數，實變與複變分析，機率論及平面幾何上，仍有許多高斯發現的小定理，正十七邊形可以尺規作圖就是一例。

在這裡，我們想介紹較少為人所知的另一個定理…高斯五邊形定理。這個定理跟古希臘的托勒密定理是等價的，也等價於接下來要介紹的 Monge 公式。在介紹 Monge 公式與高斯五邊形定理之前，先談一個比較簡單的類似定理。

## 11.1 矩形定理

**例題 11.1** 如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 $A$ 的矩形，$a_1,a_2,a_3$ 分別代表所在三角形區域的面積。




證明：

$$A^2-2a_3A-4a_1a_2=0.$$

〔證明〕令 $BE=x, EC=y, DF=a, FC=b$，由

$$A+\left(a+b\right)\left(x+y\right)=2A=2(a_1+a_2+a_3)+by$$

知

$$A+ax+ay+bx+by=(a+b)x+a(x+y)+by+2a_3.$$

整理得

$$A = ax + 2a_3.$$

故

$$\begin{aligned} A^2 &= axA + 2a_3A \\ &= x(a+b)a(x+y) + 2a_3A \\ &= (2a_1)(2a_2) + 2a_3A, \end{aligned}$$

即

$$A^2 - 2a_3A - 4a_1a_2 = 0.$$

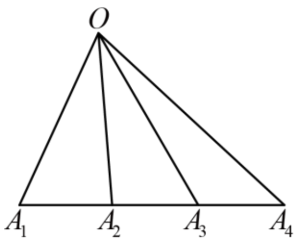
例題 11.1 是說，矩形面積 $A$ 是以 $a_1, a_2, a_3$ 為係數的二次方程式

$$x^2 - 2a_3x - 4a_1a_2 = 0$$

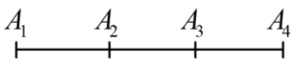
的一根。

## 11.2 Monge 公式

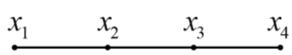
**例題 11.2** <圖一>中的 $A_2, A_3$ 是三角形 $OA_1A_4$ 邊 $A_1A_4$ 上的兩個點，<圖二>中 $A_1, A_2, A_3, A_4$ 是線段上的四個點，<圖三>中的 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 是數線上的四個點座標。



<圖一>



<圖二>



<圖三>

證明底下三個等式成立：

$$\begin{aligned} \Delta OA_1A_2 \Delta OA_3A_4 + \Delta OA_2A_3 \Delta OA_1A_4 &= \Delta OA_1A_3 \Delta OA_2A_4; \\ A_1A_2 \cdot A_3A_4 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 &= A_1A_3 \cdot A_2A_4; \\ (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (x_3 - x_2)(x_4 - x_1) &= (x_3 - x_1)(x_4 - x_2). \end{aligned}$$

〔證明〕如果令 $\Delta OA_1A_2 = p, \Delta OA_2A_3 = q, \Delta OA_3A_4 = r$，那麼第一個等式就相當於證明式子

$$pr + q(p+q+r) = (p+q)(q+r)$$

成立。但是它是一則恆等式，故一定相等。

將第一個等式的三角形面積用基本面積公式

$$\frac{底\times高}{2}$$

代入，因為它們的高都一樣，所以得到第二個等式成立。

將第二個等式中的線段長度改成數線上的座標相減得到第三個等式。

事實上，上述三個恆等式與下列三角恆等式等價：

**例題 11.3**　若$\alpha,\beta,\gamma$是任意三個角，則證明三角恆等式

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔證明〕在這裡提供兩種不同的解法：

〔解一〕利用例題 11.2 的結果，令$\angle A_1OA_2=\alpha,\angle A_2OA_3=\beta,\angle A_3OA_4=\gamma$。將等式

$$\Delta OA_1A_2\Delta OA_3A_4+\Delta OA_2A_3\Delta OA_1A_4=\Delta OA_1A_3\Delta OA_2A_4$$

換成面積公式得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}OA_1OA_2\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}OA_3OA_4\sin\gamma\\&+\frac{1}{2}OA_2OA_3\sin\beta\cdot\frac{1}{2}OA_1OA_4\sin(\alpha+\beta+\gamma)\\&=\frac{1}{2}OA_1OA_3\sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{2}OA_2OA_4\sin(\beta+\gamma).\end{aligned}$$

將兩邊同時除以$\frac{1}{4}OA_1OA_2OA_3OA_4$得到

$$\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).$$

〔解二〕利用三角學的積化和差與和差化積公式，得到

$$
\begin{aligned}
&\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\\
&=-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\alpha-\gamma)\\
&\quad-\frac{1}{2}\cos(\alpha+2\beta+\gamma)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\gamma)\\
&=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+2\beta+\gamma)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[-2\sin\frac{(\alpha-\gamma)+(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\sin\frac{(\alpha-\gamma)-(\alpha+2\beta+\gamma)}{2}\right]\\
&=-\sin(\alpha+\beta)\sin(-\beta-\gamma)\\
&=\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma).
\end{aligned}
$$

**例題 11.4 ( Monge 公式)** 設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 是凸五邊形，令 $\pi_{ij}(1\le i, j\le 4)$ 代表三角形 $A_0A_iA_j$ 的面積。證明

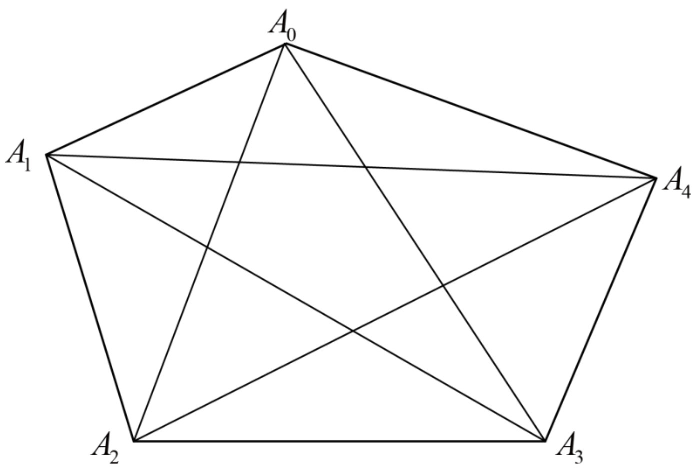
$$\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}=\pi_{13}\pi_{24}.$$

〔證明〕令 $\angle A_1A_0A_2=\alpha,\ \angle A_2A_0A_3=\beta,\ \angle A_3A_0A_4=\gamma$ ，利用三角函數的面積公式得到

$$
\begin{aligned}
&\pi_{12}\pi_{34}+\pi_{14}\pi_{23}\\
&=\frac{1}{2}A_0A_1\times A_0A_2\times A_0A_3\times A_0A_4\left[\sin\alpha\sin\gamma+\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta\right]\\
&=\frac{1}{2}A_0A_1\times A_0A_2\times A_0A_3\times A_0A_4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\\
&=\pi_{13}\pi_{24}.
\end{aligned}
$$

## 11.3 高斯五邊形定理

設 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 為凸五邊形，三角形 $A_4A_0A_1$ 的面積為 $a_0$ ，$A_0A_1A_2$ 的面積為 $a_1$ ，$A_1A_2A_3$ 的面積為 $a_2$ ，$A_2A_3A_4$ 的面積為 $a_3$ ，$A_3A_4A_0$ 的面積為 $a_4$ 。




高斯證明五邊形$A_0A_1A_2A_3A_4$的面積可以表成$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4$的公式，這就是有名的高斯五邊形面積公式：

**定理 11.1** 若令$A$是五邊形$A_0A_1A_2A_3A_4$的面積，常數$c_1,c_2$定為

$$c_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$
$$c_2 = a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_0,$$

則五邊形$A_0A_1A_2A_3A_4$的面積$A$會滿足二次方程式

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

〔證明〕令$\pi_{ij}(1 \le i, j \le 4)$代表三角形$A_0A_iA_j$的面積，則

$$\pi_{12} = a_1;$$
$$\pi_{34} = a_4;$$
$$\pi_{14} = a_0;$$
$$\pi_{23} = A - a_1 - a_4;$$
$$\pi_{13} = A - a_2 - a_4;$$
$$\pi_{24} = A - a_1 - a_3.$$

利用 Monge 公式得

$$a_1a_4 + a_0(A - a_1 - a_4) = (A - a_2 - a_4)(A - a_1 - a_3),$$

整理得

$$A^2 - c_1A + c_2 = 0.$$

想想看高斯問題的變形：如果令三角形

$$A_0A_2A_3, A_1A_3A_4, A_2A_4A_0, A_3A_0A_1, A_4A_1A_2$$

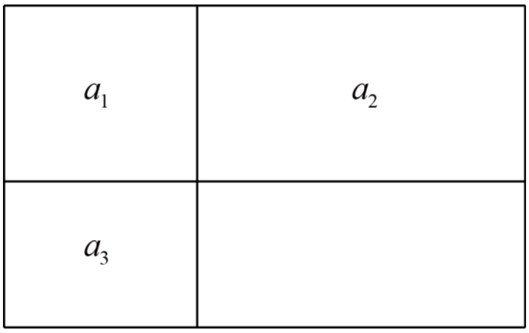
的面積依序為

$$a, b, c, d, e,$$

那麼五邊形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的面積是否也可以表成以 $a, b, c, d, e,$ 為係數的二次方程式呢？類似這樣的問題就有很多可以探討了，甚至可以探討六，七，八，…邊形的情形。

**思考問題**

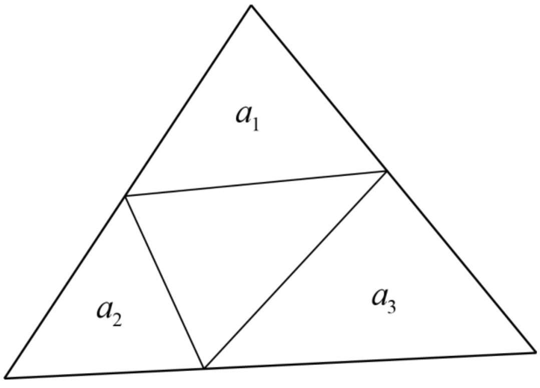
1 如下圖所示，面積為 $A$ 的大矩形，被分割成四個小矩形，其中 $a_1, a_2, a_3$ 為所在小矩形區域的面積。




證明

$$a_1(A-a_1)=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1.$$

2 如下圖所示，三角形的面積為 $A$，三個角落的面積為 $a_1, a_2, a_3$：



試求 $A$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ 的關係。